Tentamen Calculus 2

16 april 2007, 9.00-12.00 uur.

Per opgave zijn maximaal 1,5 punten te behalen. Totaal: 9 + 1 (gratis) punten.
Het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan. Echter, antwoorden die uitsluitend m.b.v. de grafische rekenmachine verkregen zijn, worden niet goed gerekend: Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes!

1. Laat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks met reële termen zijn.

   (a) Bewijs: Als de reeks convergent is, dan geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (b) Geef (zonder bewijs) een voorbeeld van een reeks die niet convergeert, alhoewel de algemene term a_n wel naar 0 gaat voor $n \to \infty$.

   (c) Vul de volgende definitie aan:
   De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heet absoluut convergent als ...

   (d) Om na te gaan of een gegeven reeks absoluut convergent is, kunnen we de ratio test gebruiken. Formuleer deze test.

2. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^2+1}$$

   (a) Bepaal de convergentiestraal R.

   (b) Bepaal alle (reële) x waarvoor de bovenstaande machtreeks convergeert.

   (c) Voor $|x-4| < R$ duiden we de som van de machtreeks aan door $f(x)$. Bereken $f'(4)$.

3. De functie f wordt gegeven door

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

   waarbij $(x,y) \neq (0,0)$.

   (a) Toon aan dat

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   niet bestaat.

   (b) Bereken de partiële afgeleiden f_x en f_y (voor $(x,y) \neq (0,0)$).

   (c) Bereken de richtingsafgeleide van f in het punt $(x,y) = (1,1)$ in de richting van de vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

   (d) Beschouw het punt $(x,y) = (1,1)$. In welke richting stijgt f het snelst?

z.o.z.

4. (a) Vul aan de volgende definitie aan:
   Zij $z = f(x, y)$ een differentieerbare functie van twee onafhankelijke variabelen x en y. De (totale) differentiaal dz wordt gedefinieerd door .....

   NB. de (totale) differentiaal wordt ook wel *df* genoemd. In het vervolg zullen we deze notatie gebruiken. Verder is R is een constante.

   (b) Bepaal alle functies $V(p, T)$ waarvoor de (totale) differentiaal wordt gegeven door

$$dV = \frac{R}{p} dT - \frac{RT}{p^2} dp$$

   (c) Bereken de lijnintegraal

$$\int_C \left(\frac{R}{p} dT - \frac{RT}{p^2} dp \right)$$

   waarbij C het rechte lijnstuk in het $p - T-$vlak is dat loopt van het punt $(p, T) = (1, 1)$ naar het punt $(p, T) = (2, 1)$.

5. Beschouw de integraal

$$\iint\limits_R e^{(x+y)/(x-y)} dx dy, \tag{1}$$

   waarbij het integratie-gebied R bestaat uit alle punten in het xy-vlak die binnen het trapezium met hoekpunten $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ en $(0, -1)$ liggen.
   De termen $x + y$ en $x - y$ in de integrand suggereren de volgende coördinaat-transformatie

$$u = x + y \qquad \text{en} \qquad v = x - y.$$

   (a) Beschrijf het gebied R in termen van de nieuwe coördinaten u en v.

   (b) Toon aan dat

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}$$

   (c) Bereken de integraal (1).

6. (a) Los op:

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

   (b) Bereken de oplossing $y(x)$ van het beginwaarde-probleem

$$y'' + 3y' + 2y = 2x \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$